ECOLES NATIONALES d'ARTS et METIERS session 1987

GÉOMÉTRIE

(Option TA)

Durée : 3 h 00

Chaque question du problème est largement indépendante des autres si l'on admet certains résultats antérieurs fournis ; dans ce cas le candidat devra le préciser clairement.

Les calculs non justifiés ne seront pas pris en considération ; et le fait de les "arranger" sans autre raison que d'obtenir un résultat donné sera sévèrement sanctionné.

Il sera tenu compte de la précision et de la netteté des tracés demandés.

I - L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté au repère orthonormé Oxyz. Le point S a pour coordonnées 0, 0, p et le point I a pour coordonnées p, 0, 0 ; p donné, positif.

1° Montrer que le cône, qui a pour sommet S et pour directrice la courbe d'équations $z = 0$, $y^2 = 2px$, a pour équation $y^2 = 2x(p - z)$.

2° Montrer que ce cône est de révolution autour de la droite SI.

3° Ecrire une équation cartésienne du plan tangent à ce cône en un de ses points, de coordonnées x_0, y_0, z_0.

II - 1° Montrer que les deux familles de courbes P_a et E_b d'équations respectives :

$$z = 0,\ y^2 = 2ax$$
$$\text{et } z = 0,\ y^2 + 2x^2 = 2b^2 \text{ (a et b paramètres réels)}$$

sont orthogonales.

Par quelle transformation simple passe t-on de la courbe P_a à la courbe $P_{a'}$? Même question pour les courbes E_b et $E_{b'}$.

2° Tracer, en les rapportant au même repère Oxy, une courbe de chaque famille. Préciser que chacune d'elle (a et b donnés, $b > 0$) ses éléments caractéristiques : axes, foyers, sommets, directrices.

3° On désigne par L_a et C_b les courbes tracées sur le cône défini au 1° et dont les projections sur le plan Oxy sont les courbes P_a et E_b.

Que représentent pour le cône les familles de courbes L_a et C_b ?

Faire un figure.

III

- 1° Donner une équation cartésienne, dans le plan Oxz, des projections sur ce plan des courbes C_b. Tracer la projection de C_p ($b = p$) et préciser ses éléments caractéristiques.

2° Montrer qu'en coordonnées polaires planes, dans le plan Oyz, (pôle S et axe polaire parallèle à Oy) la projection sur ce plan de la courbe C_p a pour équation :

$$r^2 = \frac{4p^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta}$$

3° Tracer cette projection. On précisera les symétries, les asymptotes et la tangente au point d'angle polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$.

IV -

1° Pour $\phi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $x = p \cos \phi$. Donner, en fonction de ϕ, la représentation paramétrique de l'arc de la courbe C_p.

2° A l'aide de développpements limités, déterminer les coordonnées de son centre de courbure en son point d'abscisse maximale.

* * *